

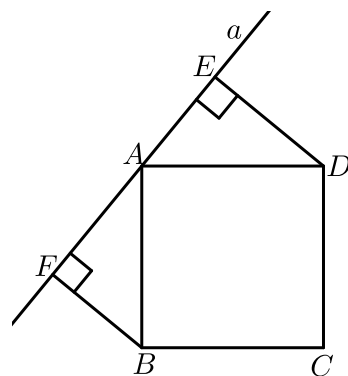
第2讲 正方形中的三垂直与半角模型（练习）

一、三垂直模型

勾股弦图

基本模型及迁移

1. 如图所示，直线 a 经过正方形 $ABCD$ 的顶点 A ，分别过顶点 B 、 D 作 $BF \perp a$ 于点 F ， $DE \perp a$ 于点 E ，若 $DE = 4$ ， $BF = 3$ ，则 EF 的长为 _____ .



【答案】 7

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB = AD, \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle BAF = 90^\circ, \angle BAF + \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle DAE,$$

在 $\triangle AFB$ 和 $\triangle DEA$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABF = \angle DAE \\ \angle AFB = \angle DEA, \\ AB = DA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle DEA,$$

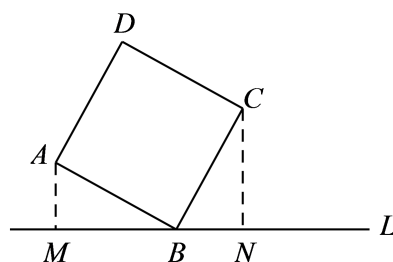
$$\therefore AF = DE = 4, BF = AE = 3,$$

$$\therefore EF = AF + AE = 4 + 3 = 7.$$

【标注】 【知识点】 三垂直模型

2.

如图，直线 L 过正方形 $ABCD$ 的顶点 B ，点 A 、 C 到直线 L 的距离分别是1和2，则正方形的边长是 _____ 。

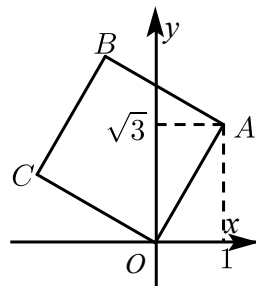


【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore AB = CB$ ， $\angle ABM + \angle CBN = 90^\circ$ ，
 而 $AM \perp MN$ ， $CN \perp BN$ ，
 $\therefore \angle BAM = \angle CBN$ ， $\angle AMB = \angle CNB = 90^\circ$ ，
 $\therefore \triangle AMB \cong \triangle BCN$ (AAS)，
 $\therefore BM = CN$ ，
 $\therefore AB$ 为 $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 。
 故答案为： $\sqrt{5}$ 。

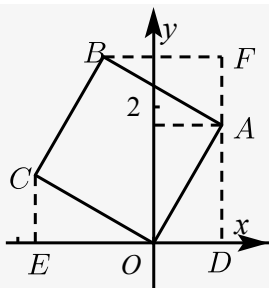
【标注】 【知识点】 勾股定理与全等

3. 如图，将正方形 $OABC$ 放在平面直角坐标系中， O 是原点， A 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$ ，则点 C 的坐标为 _____ 。



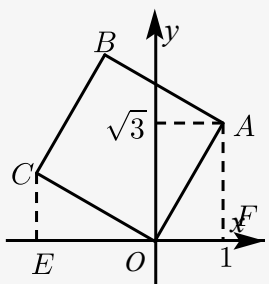
【答案】 $(-\sqrt{3}, 1)$

【解析】 方法一：如图，作 $CE \perp x$ 轴， $AD \perp x$ 轴， $BF \perp AD$ ，



易证 $\triangle OCE \cong \triangle AOD$, $\triangle BAF \cong \triangle AOD$,
 $\therefore OE = \sqrt{3}$, $CE = 1$, $BF = \sqrt{3}$, $AF = 1$,
 $\therefore C(-\sqrt{3}, 1)$, $B(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$.

方法二：如图作 $AF \perp x$ 轴于 F , $CE \perp x$ 轴于 E .

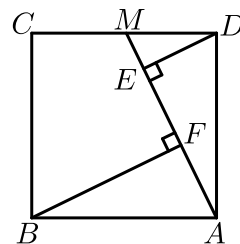


$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是正方形,
 $\therefore OA = OC$, $\angle AOC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle COE + \angle AOF = 90^\circ$, $\angle AOF + \angle OAF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle COE = \angle OAF$,
 在 $\triangle COE$ 和 $\triangle OAF$ 中,

$$\begin{cases} \angle CEO = \angle AFO = 90^\circ \\ \angle COE = \angle OAF \\ OC = OA \end{cases},$$
 $\therefore \triangle COE \cong \triangle OAF$,
 $\therefore CE = OF$, $OE = AF$,
 $\therefore A(1, \sqrt{3})$,
 $\therefore CE = OF = 1$, $OE = AF = \sqrt{3}$,
 $\therefore$ 点 C 坐标 $(-\sqrt{3}, 1)$.
 故答案为 $(-\sqrt{3}, 1)$.

【标注】【知识点】三垂直模型

4. 如图，点 M 是正方形 $ABCD$ 边 CD 上一点，连接 AM ，作 $DE \perp AM$ 于点 E ，作 $BF \perp AM$ 于点 F .
 求证： $BF = AE$.



【答案】证明见解析 .

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形 ,

$$\therefore BA = AD, \angle BAD = 90^\circ .$$

$\because DE \perp AM$ 于点 E , $BF \perp AM$ 于点 F ,

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ, \angle DEA = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle ABF + \angle BAF = 90^\circ, \angle EAD + \angle BAF = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle EAD .$$

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle DEA$ 中 ,

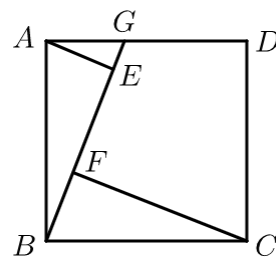
$$\therefore \begin{cases} \angle BFA = \angle DEA \\ \angle ABF = \angle EAD , \\ AB = DA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DAE ,$$

$$\therefore BF = AE .$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

5. 如图 , G 为正方形 $ABCD$ 的边 AD 上的一个动点 , $AE \perp BG$, $CF \perp BG$, 垂足分别为点 E , F . 已知 $AD = 4$, 则 $AE^2 + CF^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 16

【解析】 易证 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$,

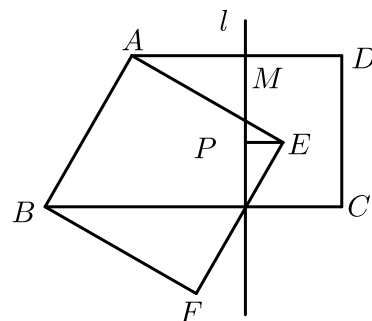
$$\therefore BE = CF ,$$

$$\therefore AE^2 + CF^2 = AE^2 + BE^2 = AB^2 = AD^2 = 16 .$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

6. 如图所示，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ， l 是 AD 的垂直平分线，交 AD 于点 M ，以腰 AB 为边作正方形 $ABFE$ ，作 $EP \perp l$ 于点 P 。

求证： $2EP + AD = 2CD$ 。

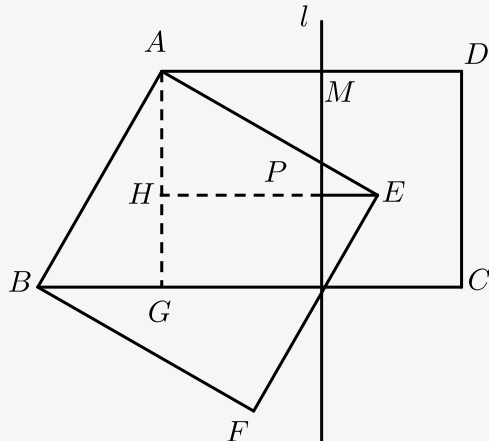


【答案】证明见解析。

【解析】方法一：直接证明 $2EP + AD = 2CD$ 不太可行，可转化成证明

$$EP + \frac{1}{2}AD = CD,$$

$$\text{而 } \frac{1}{2}AD = AM,$$



故进而考虑到将 AM 、 EP 集中到一条线段上，然后将 CD 也平移过来。

我们将视线集中在正方形 $ABFE$ 之中，通过 $\triangle ABG \cong \triangle EHA$ 可以得证。

过 A 点作 BC 的垂线，过 P 作 AG 的垂线，垂足分别为 G 、 H ，

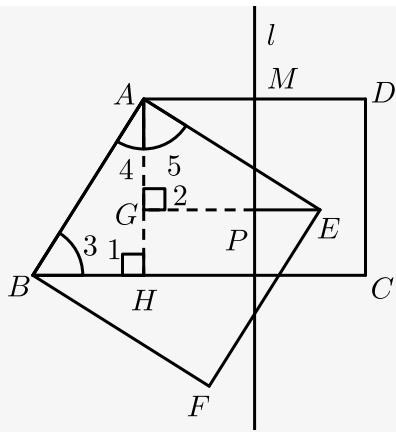
则有 $HGPN$ 为矩形， $\angle BAG = 90^\circ - \angle EAH = \angle AEH$ 。

$\angle ABG = \angle 90^\circ - \angle BAG = \angle EAH$ 。

又因为 $AB = AE$ ，所以 $\triangle ABG \cong \triangle EHA$ 。

所以 $2EP + AD = 2HR = 2AG = 2CD$ 。

方法二：作 $AH \perp BC$ 于 H ，延长 EP 交 AH 于 G ，



l 是 AD 的垂直平分线，

$$\therefore AM = MD = \frac{1}{2}AD, l \parallel AH.$$

又 $\because ABCD$ 是直角梯形，

$\therefore AHCD$ 是矩形，

$$\therefore AH = CD.$$

又 $\because PE \perp l$ ，

$\therefore EG \perp AH$ ，

$\therefore AGPM$ 是矩形，

$$\therefore GP = AM = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ.$$

在正方形 $ABFE$ 中， $AB = AE$ ， $\angle BAE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle 4 + \angle 5 = 90^\circ \therefore \angle 3 = \angle 5.$$

在 $\triangle ABH$ 和 $\triangle EAG$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle 3 = \angle 5 \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AB = EA \end{cases},$$

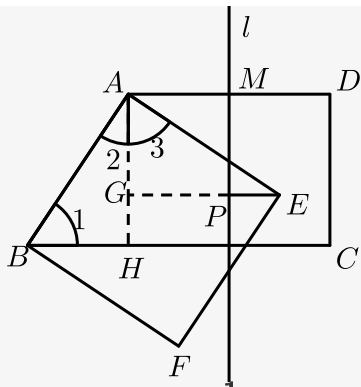
$$\therefore \triangle ABH \cong \triangle EAG, \therefore AH = EG,$$

$$\therefore CD = GP + PE = \frac{1}{2}AD + PE.$$

$$\text{即 } 2CD = AD + 2PE.$$

方法三：作 $AH \perp BC$ 于 H ，延长 EP 交 AH 于 G ，

$\because l$ 是 AD 的垂直平分线，



$$\therefore AM = MD = \frac{1}{2}AD, l \parallel AH,$$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是直角梯形,

$\therefore$ 四边形 $AHCD$ 是矩形,

$$\therefore AH = CD,$$

$$\therefore PE \perp l,$$

$$\therefore EG \perp AH,$$

$\therefore$ 四边形 $AGPM$ 是矩形,

$$\therefore GP = AM = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore \angle AHB = \angle AGE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

在正方形 $ABFE$ 中, $AB = AE$, $\angle BAE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

在 $\triangle ABH$ 和 $\triangle EAG$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ \angle AHB = \angle AGE, \\ AB = EA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABH \cong \triangle EAG \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AH = EG,$$

$$\therefore CD = GP + PE = \frac{1}{2}AD + PE,$$

$$\text{即 } 2CD = AD + 2PE.$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

弦图变形的拓展

十字模型

7. 如图, 已知正方形 $ABCD$.

- (1) 如图1, E 是 AD 上一点, 过 BE 上一点 O 作 BE 的垂线交 AB 于点 G , 交 CD 于点 H , 求证:
 $BE = GH$.

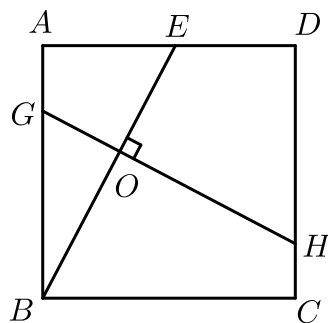


图1

- (2) 如图2, 过正方形 $ABCD$ 内任意一点作两条互相垂直的直线, 分别交 AD , BC 于点 E , F , 交 AB , CD 于点 G , H , EF 与 GH 相等吗? 请写出你的结论.

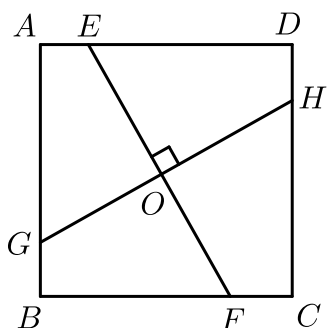


图2

- (3) 当点 O 在正方形 $ABCD$ 的边上或外部时, 过点 O 作两条互相垂直的直线, 被正方形相对的两边 (或它们的延长线) 截得的两条线段还相等吗? 其中一种情形如图3所示, 过正方形 $ABCD$ 外一点 O 作互相垂直的两条直线 m , n , m 与 AD , BC 的延长线分别交于点 E , F , n 与 AB , DC 的延长线分别交于点 G , H , 试就该图形对你的结论加以证明.

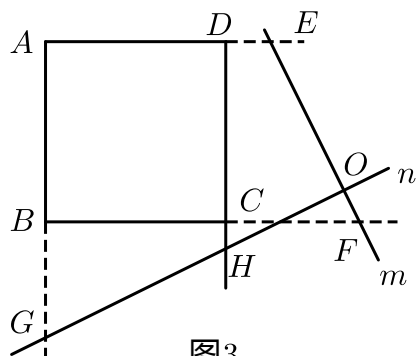


图3

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $EF = GH$, 理由见解析.

(3) 相等, 证明见解析.

【解析】 (1) 在图1中, 过点 A 作 GH 的平行线, 交 DC 于点 H' , 交 BE 于点 O' ,

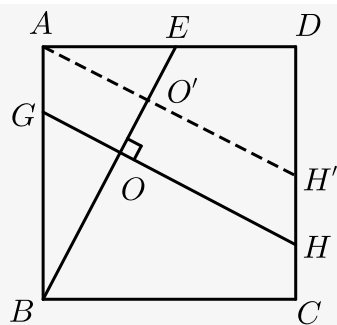


图1

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

∴ $\angle D = 90^\circ$, $\angle H'AD + \angle AH'D = 90^\circ$,

∵ $GH \perp BE$, $AH' \parallel GH$,

∴ $AH' \perp BE$.

∴ $\angle H'AD + \angle BEA = 90^\circ$,

∴ $\angle BEA = \angle AH'D$,

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle ADH'$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle D \\ \angle BEA = \angle AH'D , \\ BA = AD \end{cases}$$

∴ $\triangle BAE \cong \triangle ADH'$,

∴ $BE = AH' = GH$.

(2) $EF = GH$, 理由如下 :

过点 E 作 $EM \perp BC$ 于 M , 过 G 作 $GN \perp CD$ 于 N .

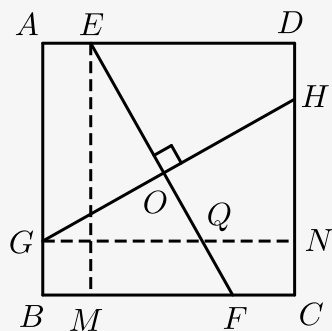


图2

∴ $\angle EMF = \angle GNH = 90^\circ$,

∵ $GH \perp EF$,

∴ $\angle EOG = \angle GOF = 90^\circ$,

∴ $\angle MEF + \angle EQG = 90^\circ$, $\angle NGH + \angle EQG = 90^\circ$,

∴ $\angle MEF = \angle NGH$,

又 $GN = EM$,

∴ $\triangle EMF \cong \triangle GNH$,

$$\therefore EF = GH.$$

(3) 在图3中, 过点A作 m 的平行线交 BC 于点 F' , 过点

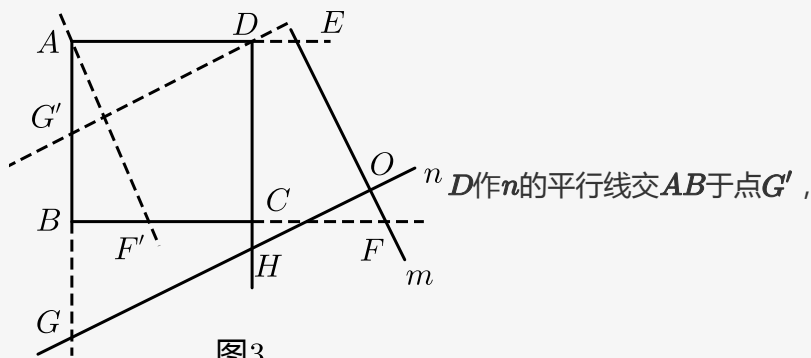


图3

则 $EF = AF'$, $G'D = GH$,

由(1)知, $\text{Rt}\triangle ABF' \cong \text{Rt}\triangle DAG'$,

$$\therefore AF' = DG',$$

$$\therefore EF = GH.$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

8. 根据图解答下列各题:

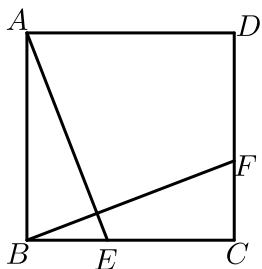


图1

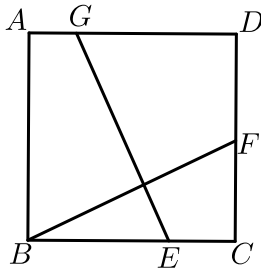


图2

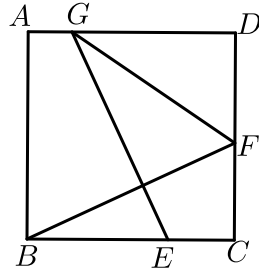


图3

(1) 如图1, 正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别是 BC 、 CD 边上的点, 满足 $AE \perp BF$. 求证:

$$AE = BF.$$

(2) 如图2, 正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 分别是 BC 、 CD 、 AD 边上的点, 满足 $EG = BF$, 若 $\angle FBC = 35^\circ$, 则 $\angle DGE =$ _____.

(3) 如图3, 正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 分别是 BC 、 CD 、 AD 边上的点, 满足 $EG = BF$, 连接 GF . 求证: $GF + BE > \sqrt{2}BF$.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 55°

(3) 证明见解析.

【解析】(1) $\because$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = \angle C = 90^\circ.$$

$$\therefore AE \perp BF,$$

$$\therefore \angle AGB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3.$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ AB = BC \\ \angle ABE = \angle C \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF (ASA),$$

$$\therefore AE = BF.$$

(2) 过点 A 作 $AH \parallel GE$ 交 BC 于 H ,

$\because$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore AD \parallel BC, AB = BC,$$

$$\angle ABC = \angle C = 90^\circ = \angle BAD.$$

$$\therefore AH \parallel GE, AG \parallel HE,$$

$\therefore$ 四边形 $AHEG$ 为平行四边形,

$$\therefore AH = GE.$$

$$\text{又} \because GE = BF,$$

$$\therefore AH = BF.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 和 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中,

$$\begin{cases} AB = BC \\ AH = BF \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABH \cong \text{Rt}\triangle BCF (HL).$$

$$\therefore \angle FBC = \angle BAH = 35^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BAH + \angle HAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HAD = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ,$$

$$\text{又} \because AH \parallel GE,$$

$$\therefore \angle DGE = \angle HAD,$$

$$\therefore \angle DGE = 55^\circ.$$

(3) 过点 B 作 $BH \parallel EG$ 交 DA 延长线于 H , 连接 HF .

$\because$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore AB = BC, \angle BAD = \angle ABC = \angle C = 90^\circ, AD \parallel BC.$$

$$\therefore HG \parallel BE, HB \parallel EG,$$

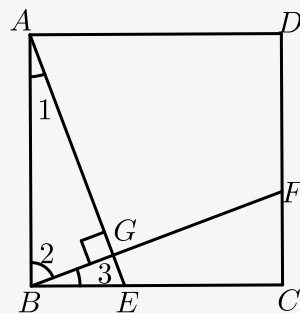
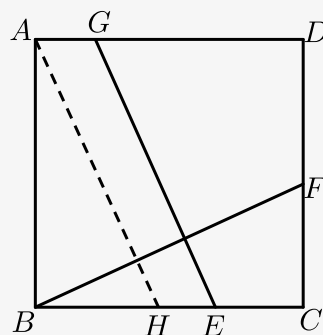


图 1



$\therefore$ 四边形 $HBEG$ 为平行四边形 ,

$\therefore GE = BH, HG = BE$.

又 $\because EG = BF$,

$\therefore BF = BH$.

$\because \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle HAB = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle HAB$ 和 $\text{Rt}\triangle FCB$,

$$\begin{cases} AB = BC \\ BH = BF \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle HAB \cong \text{Rt}\triangle FCB (\text{HL})$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

又 $\because \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle HBF = 90^\circ$.

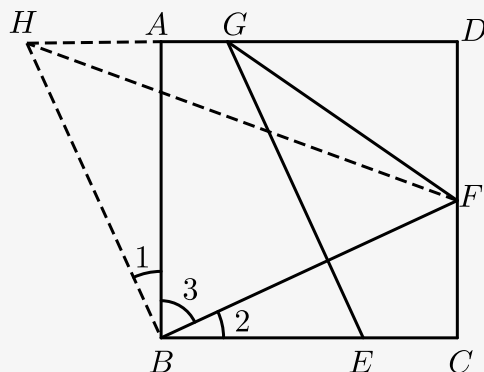
在 $\text{Rt}\triangle HBF$ 中 ,

$$HB^2 + BF^2 = HF^2 ,$$

$$\therefore HF = \sqrt{2}BF .$$

在 $\triangle HGF$ 中 , $HG + FG > HF$,

$$\therefore BE + FG > \sqrt{2}BF .$$

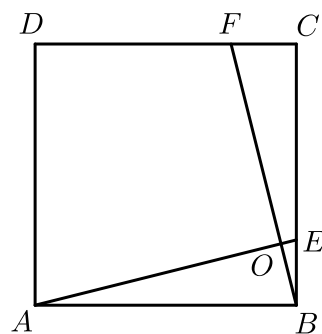


【标注】【知识点】正方形与全等综合

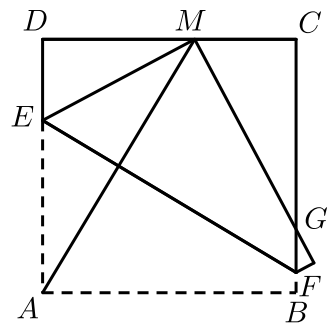
9. 在正方形 $ABCD$ 中 .

(1) 如图 , 若点 E, F 分别在边 BC, CD 上 , AE, BF 交于点 O , 且 $\angle AOF = 90^\circ$ 求证 :

$$AE = BF .$$



(2) 如图 , 将正方形 $ABCD$ 折叠 , 使顶点 A 与 CD 边上的点 M 重合 , 折痕交 AD 于 E , 交 BC 于 F , 边 AB 折叠后与 BC 边交于点 G . 若 $DC = 5, CM = 2$, 求 EF 的长 .



【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\sqrt{34}$.

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$$\therefore AB = BC, \angle ABE = \angle BCF = 90^\circ,$$

$$\because \angle AOF = 90^\circ, \therefore \angle BAE + \angle OBA = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle FBC + \angle OBA = 90^\circ, \therefore \angle BAE = \angle FBC,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中

$$\therefore \begin{cases} \angle ABE = \angle BCF \\ AB = BC \\ \angle BAE = \angle FBC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF (\text{ASA}),$$

$$\therefore AE = BF.$$

(2) 如图 . 由折叠的性质得 $EF \perp AM$,

过点 F 作 $FH \perp AD$ 于 H , 交 AM 于 O ,

$$\text{则} \angle ADM = \angle FHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HAO + \angle AOH = 90^\circ, \angle HAO + \angle AMD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle POF = \angle AOH = \angle AMD,$$

又 $\because EF \perp AM$,

$$\therefore \angle POF + \angle OFP = 90^\circ, \angle HFE + \angle FEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle POF = \angle FEH, \therefore \angle FEH = \angle AMD,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$$\therefore AD = CD = FH = 5,$$

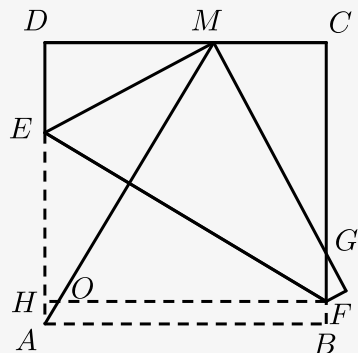
在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle FHE$ 中 ,

$$\therefore \begin{cases} \angle ADM = \angle FHE \\ \angle AMD = \angle FEH \\ AD = FH \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADM \cong \triangle FHE (\text{AAS}),$$

$$\therefore EF = AM,$$

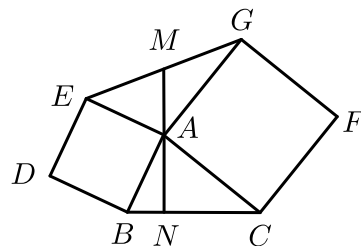
$$\begin{aligned} \because CM = 2, \therefore DM = DC - CM = 5 - 2 = 3, \\ \therefore AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}, \\ \therefore EF = \sqrt{34}. \end{aligned}$$



【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

💡 双正方形模型 (三垂综合应用)

10. 已知如图，分别以 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 为边作正方形 $ABDE$ 、 $ACFG$ ，过 A 作 $MN \perp BC$ ，交 BC 于 N ，交 EG 于 M ，求证： $EM = MG$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】方法一：如图，以 N 为原点建立直角坐标系，

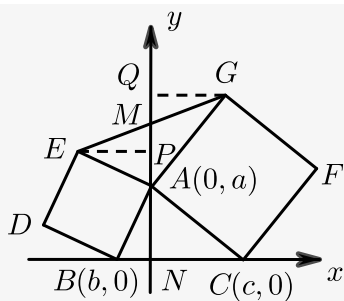
设 $A(0, a)$ ， $B(b, 0)$ ， $C(c, 0)$ ，

构造三垂直模型，

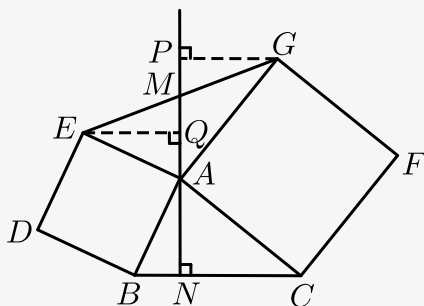
易得： $x_E = -a$ ， $x_G = a$ ，

由于 $x_M = 0 = \frac{x_E + x_G}{2}$ ，

故 M 为 EG 中点。



方法二：分别过 G ， E 作 NA 延长线的垂线，垂足为 P ， Q ，



易得： $\triangle BNA \cong \triangle AQE$ (AAS)，

$\triangle CNA \cong \triangle APG$ (AAS)，

$EQ = AN$ ， $PG = AN$ ，

$PG = EQ$ ，

易得： $\triangle EQM \cong \triangle GPM$ (AAS)，

$\therefore EM = MG$ 。

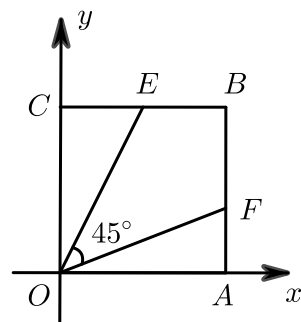
【标注】【知识点】三垂直模型

二、角含半角模型

|| 正方形角含半角的和差关系

🔗 半角在倍角内

11. 如图，在正方形 $OABC$ 中，点 B 的坐标是 $(4, 4)$ ，点 E ， F 分别在边 BC ， BA 上， $OE = 2\sqrt{5}$ ，若 $\angle EOF = 45^\circ$ ，则 F 点的纵坐标是（ ）。



A. 1

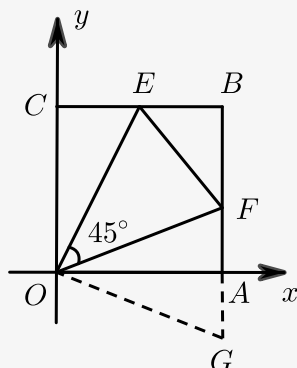
B. $\frac{4}{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{5} - 1$

【答案】 B

【解析】 延长FA至点G，使得AG = CE，连接OG，
点B的坐标是(4, 4)，且四边形OABC是正方形，



$$\therefore OC = BC = OA = AB = 4,$$

$$\therefore OE = 2\sqrt{5}, OC = 4,$$

$$\therefore CE = \sqrt{OE^2 - OC^2} = 2,$$

$$\therefore BE = 2,$$

在 $\triangle OCE$ 和 $\triangle OAG$ 中，

$$\begin{cases} OC = OA \\ \angle OCE = \angle OAG, \\ CE = AG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OCE \cong \triangle OAG \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle GOA = \angle COE, OG = OE,$$

$$\therefore \angle EOF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle COE + \angle AOF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EOF = \angle GOF,$$

在 $\triangle EOF$ 和 $\triangle GOF$ 中，

$$\begin{cases} OE = OG \\ \angle EOF = \angle GOF, \\ OF = OF \end{cases}$$

$$\triangle EOF \cong \triangle GOF \text{ (SAS) },$$

$$\therefore EF = GF,$$

$$\text{设 } EF = GF = x,$$

$$\therefore AF = x - 2, BF = 6 - x,$$

在 $\text{Rt}\triangle EBF$ 中,

$$BE^2 + BF^2 = EF^2,$$

$$\therefore 2^2 + (6 - x)^2 = x^2,$$

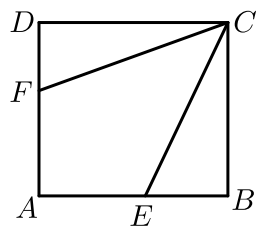
$$\therefore x = \frac{10}{3},$$

$$\therefore FA = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3},$$

$$\therefore F \text{ 点的纵坐标是 } \frac{4}{3}.$$

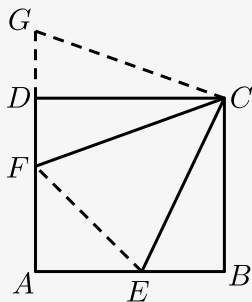
【标注】【知识点】正方形中的半角模型

12. 如图. 正方形 $ABCD$ 的边长为 6. 点 E, F 分别在 AB, AD 上. 若 $CE = 3\sqrt{5}$, 且 $\angle ECF = 45^\circ$, 则 CF 的长为 _____.



【答案】 $2\sqrt{10}$

【解析】方法一：如图，延长 FD 到 G ，使 $DG = BE$ 。



连接 CG, EF 。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$$\text{在 } \triangle BCE \text{ 与 } \triangle DCG \text{ 中, } \begin{cases} CB = CD \\ \angle CBE = \angle CDG, \\ BE = DG \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCG \text{ (SAS) },$

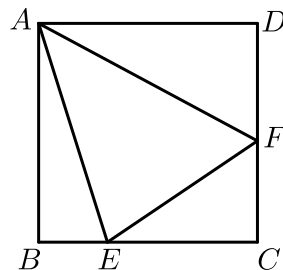
$$\begin{aligned}
&\therefore CG = CE, \angle DCG = \angle BCE, \\
&\therefore \angle GCF = 45^\circ, \\
&\text{在} \triangle GCF \text{与} \triangle ECF \text{中}, \\
&\quad \begin{cases} GC = EC \\ \angle GCF = \angle ECF, \\ CF = CF \end{cases} \\
&\therefore \triangle GCF \cong \triangle ECF (\text{SAS}), \\
&\therefore GF = EF, \\
&\therefore CE = 3\sqrt{5}, CB = 6, \\
&\therefore BE = \sqrt{CE^2 - CB^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 6^2} = 3, \\
&\therefore AE = 3, \\
&\text{设} AF = x, \text{则} DF = 6 - x, GF = 3 + (6 - x) = 9 - x, \\
&\therefore EF = \sqrt{AE^2 + x^2} = \sqrt{9 + x^2}, \\
&\therefore (9 - x)^2 = 9 + x^2, \\
&\therefore x = 4, \\
&\text{即} AF = 4, \\
&\therefore GF = 5, \\
&\therefore DF = 2, \\
&\therefore CF = \sqrt{CD^2 + DF^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}.
\end{aligned}$$

方法二：由半角模型可得， $EF = DF + BE$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore CE = 3\sqrt{5}, BC = 6, \\
&\therefore BE = 3, \\
&\text{设} DF = x, \text{则} AF = 6 - x, EF = 3 + x, \\
&\text{在} \text{Rt} \triangle EAF \text{中}, 3^2 + (6 - x)^2 = (3 + x)^2, \text{解得} x = 2, \\
&\therefore CF = 2\sqrt{10}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

13. 如图，正方形 $ABCD$ 边长为2， $\angle EAF = 45^\circ$ ，则 $\triangle CEF$ 的周长为 _____。

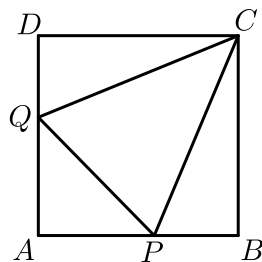


【答案】 4

【解析】 由“半角模型”易知 $EF = BE + DF$,
 $\therefore \triangle CEF$ 周长为 $BC + CD = 4$.

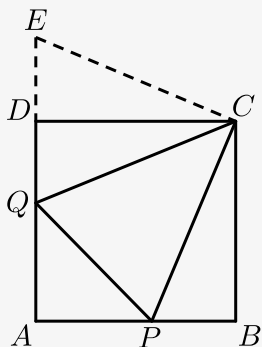
【标注】 【知识点】 正方形中的半角模型

14. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, P, Q 分别为 AB, DA 上的点, 当 $\triangle APQ$ 的周长为 2 时, 则 $\angle PCQ = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 45°

【解析】 延长 AD 至 E , 使得 $BP = DE$,



$\therefore \triangle EDC \cong \triangle CPB$,

则 $CE = CP$,

由 $AQ + PQ + AP = EA + AP$,

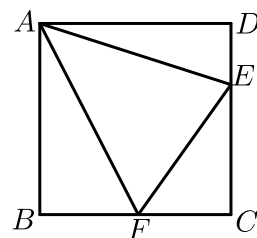
$\therefore EQ = PQ$,

$\therefore \triangle CEQ \cong \triangle CPQ$,

则 $\angle ECQ = \angle PCQ = 90^\circ \times \frac{1}{2} = 45^\circ$.

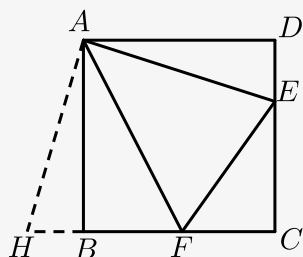
【标注】 【知识点】 半角模型

15. 如图, E, F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD, BC 上的点, 且 $DE = 10\text{cm}$, $\angle EAF = 45^\circ$,
 $\triangle EFC$ 的周长为 80cm , 则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$.



【答案】 34

【解析】 如图，延长CB于H，使 $BH = DE = 10\text{cm}$ ，连接AH，



$\because$ 四边形ABCD是正方形，

$\therefore \angle ADE = \angle ABH = 90^\circ$ ， $AD = AB$ ，

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABH$ 中，

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle ADE = \angle ABH, \\ DE = BH \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABH (\text{SAS})$ ，

$\therefore AE = AH$ ， $\angle DAE = \angle BAH$ ，

又 $\because \angle EAF = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle HAF = \angle BAH + \angle BAF = \angle DAE + \angle BAF$

$= 90^\circ - \angle EAF = 45^\circ$ ，

在 $\triangle HAF$ 和 $\triangle EAF$ 中，

$$\begin{cases} AH = AE \\ \angle HAF = \angle EAF, \\ AF = AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle HAF \cong \triangle EAF (\text{SAS})$ ，

$\therefore HF = EF$ ，

又 $\because C_{\triangle EFC} = 80\text{cm} = EF + CF + CE$

$= HF + CF + CE$

$= BH + BF + CF + CE$

$= DE + BF + CF + CE$

$= BC + CD$

$= 2BC$ ，

$\therefore$ 可得正方形边长 $BC = \frac{80}{2} = 40\text{cm}$,

设 BF 为 x ,

则 $CE = CD - DE = BC - DE = 30\text{cm}$,

$CF = 80 - x - 30 = (50 - x)\text{cm}$,

在 $\text{Rt}\triangle ECF$ 中, 由勾股定理可得:

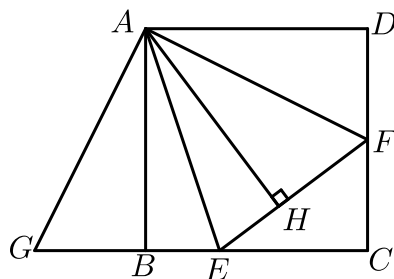
$$x^2 = (50 - x)^2 + 30^2,$$

解得 $x = 34$, 即 $EF = 34\text{cm}$.

故答案为 34.

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

16. 如图, 在正方形 $ABCD$ 内作 $\angle EAF = 45^\circ$, AE 交 BC 于点 E , AF 交 CD 于点 F , 连接 EF , 过点 A 作 $AH \perp EF$, 垂足为点 H , 将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABG$, 若 $BE = 2$, $DF = 3$, 则 AH 的长为 ().



A. 6

B. 7.2

C. 7

D. $6\sqrt{2}$

【答案】 A

【解析】 由旋转的性质可知: $AF = AG$, $\angle DAF = \angle BAG$, $BG = DF = 3$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$,

又 $\therefore \angle EAF = 45^\circ$,

$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 45^\circ$,

$\therefore \angle BAG + \angle BAE = 45^\circ$,

$\therefore \angle GAE = \angle FAE$,

在 $\triangle GAE$ 和 $\triangle FAE$ 中,
$$\begin{cases} AG = AF \\ \angle GAE = \angle FAE \\ AE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle GAE \cong \triangle FAE$ (SAS),

$\therefore AB \perp GE$, $AH \perp EF$,

$$\therefore AB = AH, GE = FE = BG + BE = 5,$$

设正方形的边长为 x , 则 $EC = x - 2, FC = x - 3$,

在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中, 由勾股定理得: $EF^2 = FC^2 + EC^2$,

$$\text{即}(x - 2)^2 + (x - 3)^2 = 25,$$

解得: $x = 6$ 或 $x = -1$ (不合题意, 舍去),

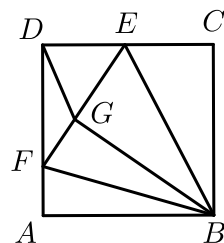
$$\therefore AB = 6,$$

$$\therefore AH = 6,$$

故选A.

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

17. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为1, $\angle EBF = 45^\circ$, 过点 B 作 $BG \perp EF$ 于 G . 下列说法: ①若 $AF = \frac{1}{3}$, 则 $DG \parallel EB$; ②若 E 为 CD 的中点, 则 $\triangle GDE$ 的面积为 $\frac{1}{15}$; ③若 $AF = CE$, 则 $AF = \sqrt{2} - 1$; ④ $AF \cdot CE + BG \cdot EF = 1$. 其中正确的是 ().



A. ①②③

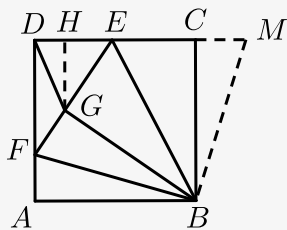
B. ①②④

C. ①③④

D. ②③④

【答案】 C

【解析】 延长 DC 至 M , 使得 $CM = AF$, 连结 BM ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC = CD = AD,$$

$$\angle BAD = \angle BCD = \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle BCM = 90^\circ,$$

在 $\triangle BAF$ 和 $\triangle BCM$ 中,

$$\begin{cases} BA = BC \\ \angle BAF = \angle BCM, \\ AF = CM \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle BAF \cong \triangle BCM, \\
&\therefore \angle ABF = \angle CBM, AF = CM, BF = BM, \\
&\therefore \angle EBF = 45^\circ, \\
&\therefore \angle ABF + \angle CBE = 45^\circ, \\
&\therefore \angle CBM + \angle CBE = 45^\circ, \\
&\therefore \angle EBF = \angle EBM = 45^\circ, \\
&\text{在} \triangle BEF \text{和} \triangle BEM \text{中}, \\
&\quad \begin{cases} BF = BM \\ \angle EBF = \angle EBM, \\ BE = BE \end{cases} \\
&\therefore \triangle BEF \cong \triangle BEM, \\
&\therefore EF = EM, \angle BEM = \angle BEF, \\
&\therefore BG \perp EF, BC \perp EM, \\
&\therefore BG = BC = AB, \\
&\text{在} \text{Rt} \triangle BCE \text{和} \text{Rt} \triangle BGE \text{中}, \\
&\quad \begin{cases} BG = BC \\ BE = BE \end{cases} \\
&\therefore \text{Rt} \triangle BCE \cong \text{Rt} \triangle BGE, \\
&\therefore EC = EG, \angle BEC = \angle BEG, \\
&\therefore EF - EG = EM - EC, \\
&\therefore FG = CM = AF, EF = AF + CE, \\
&\text{当} AF = \frac{1}{3} \text{时}, FG = \frac{1}{3}, DF = \frac{2}{3}, \\
&\text{设} EC = EG = x, DE = 1 - x, \\
&EF = x + \frac{1}{3}, \\
&\therefore \text{在} \text{Rt} \triangle DEF \text{中}, DE^2 + DF^2 = EF^2, \\
&\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^2 + (1 - x)^2 = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2, \\
&\text{解得} x = \frac{1}{2}, \\
&\therefore CE = DE = EG = \frac{1}{2}, \\
&\text{即} E \text{为} CD \text{的中点}, \\
&\therefore \angle EGD = \angle EDG = \angle GEB = \angle CEB, \\
&\therefore DG \parallel EB,
\end{aligned}$$

故①正确；

当 E 为 CD 的中点时，由①可知，

$$\text{此时 } AF = \frac{1}{3}, DF = \frac{2}{3},$$

$$EG = CE = \frac{1}{2}, EF = \frac{5}{6},$$

过点G作 $GH \perp CD$ 于H,

$$\therefore HG \parallel DF,$$

$$\therefore \frac{HG}{DF} = \frac{EG}{EF} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore HG = \frac{3}{5}DF = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle DEG} = \frac{1}{2}DE \cdot GH$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{1}{10}.$$

故②错误;

$$\text{当 } AF = CE = M \text{ 时, } EF = 2m,$$

$$\therefore DE = DF = 1 - m,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEF \text{ 中, } DE^2 + DF^2 = EF^2,$$

$$\therefore \sqrt{2}DE = EF,$$

$$\therefore \sqrt{2}(1 - m) = 2m,$$

$$\therefore \sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})m,$$

$$\therefore m = \sqrt{2} - 1,$$

$$\text{即 } AF = \sqrt{2} - 1,$$

故③正确;

$$\text{设 } AF = a, CE = b, \text{ 则 } EF = a + b,$$

$$DF = 1 - a, DE = 1 - b,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEF \text{ 中, } (1 - a)^2 + (1 - b)^2 = (a + b)^2,$$

$$\therefore 1 - 2a + a^2 + 1 - 2b + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$\therefore ab = 1 - a - b,$$

$$\therefore AF \cdot CE = 1 - (a + b) = 1 - EF,$$

$$\therefore BG = BC = 1,$$

$$\therefore BG \cdot EF = EF,$$

$$\therefore AF \cdot CE + BG \cdot EF = 1 - EF + EF = 1,$$

$$\text{即 } AF \cdot CE + BG \cdot EF = 1,$$

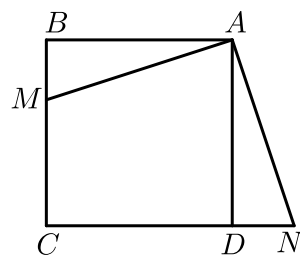
故④正确.

$\therefore$ 正确的是①③④.

故选C.

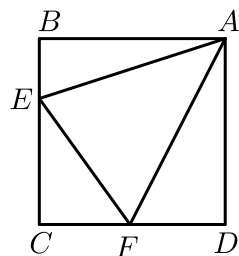
【标注】【知识点】正方形中的半角模型

18. 【感知】如图①，点 M 是正方形 $ABCD$ 的边 BC 上一点，点 N 是 CD 延长线上一点，且 $MA \perp AN$ ，易证 $\triangle ABM \cong \triangle ADN$ ，进而证得 $\angle AMB = \angle AND$ 。



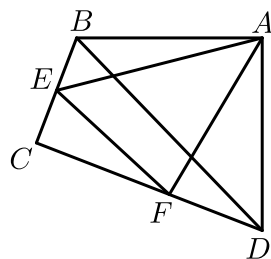
图①

- (1) 【应用】如图②，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，且 $\angle EAF = 45^\circ$ 。求证： $\angle BEA = \angle AEF$ 。



图②

- (2) 【拓展】如图③，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ 。若 $\angle BEA = 50^\circ$ ，则 $\angle AFD$ 的大小为 _____ 度。

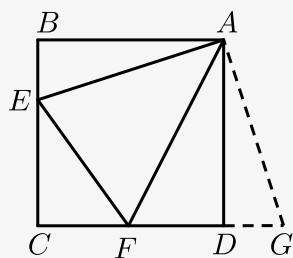


图③

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 85

【解析】(1) 如图②中，过点 A 作 $AG \perp AE$ 交 CD 延长线于点 G 。



图②

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形 ,
 $\therefore AB = AD$, $\angle B = \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$.
 $\therefore \angle B = \angle ADG = 90^\circ$, $\angle BAE + \angle EAD = 90^\circ$.
 $\therefore AG \perp AE$,
 $\therefore \angle DAG + \angle EAD = 90^\circ$.
 $\therefore \angle BAE = \angle DAG$.
 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle B = \angle ADG \\ AB = AD \\ \angle BAE = \angle GAD \end{cases}$$
 ,
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG (\text{ASA})$,
 $\therefore AE = AG$, $BE = DG$, $\angle BEA = \angle DGA$,
 $\therefore \angle EAF = 45^\circ$, $AG \perp AE$,
 $\therefore \angle EAF = \angle GAF = 45^\circ$.
 在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle FAG$ 中 ,

$$\begin{cases} AF = AF \\ \angle FAE = \angle FAG \\ AE = AG \end{cases}$$
 ,
 $\therefore \triangle FAE \cong \triangle FAG (\text{SAS})$,
 $\therefore \angle AGF = \angle AEF$,
 $\therefore \angle BEA = \angle AEF$.

(2) 如图③中 , 过点 A 作 $AN \perp AE$ 交 CD 延长线于点 N .

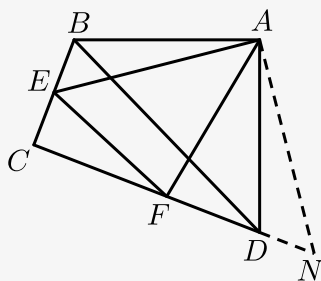


图 ③

$\because AB = AD$, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$,
 $\angle ADN + \angle ADC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle ABE = \angle ADN$,
 $\because AN \perp AE$,
 $\therefore \angle DAN + \angle EAD = 90^\circ$.
 $\because \angle BAE + \angle EAD = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAE = \angle DAN$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADN$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle ADN \\ AB = AD \\ \angle BAE = \angle DAN \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADN (ASA),$

$\therefore \angle AEB = \angle N = 50^\circ, \angle FAN = \angle FAE = 45^\circ,$

$\therefore \angle AFN = 180^\circ - \angle FAN - \angle N = 85^\circ.$

故答案为: 85.

【标注】【知识点】对角互补模型

半角在倍角外

19. 已知: 正方形 $ABCD$ 中, $\angle MAN = 45^\circ$, 绕点 A 顺时针旋转, 它的两边分别交 CB 、 DC (或它们的延长线) 于点 M 、 N .

- (1) 如图1, 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM = DN$ 时, 有 $BM + DN = MN$, 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时, 如图2, 请问图1中的结论是否成立? 如果成立, 请给予证明, 如果不成立, 请说明理由.

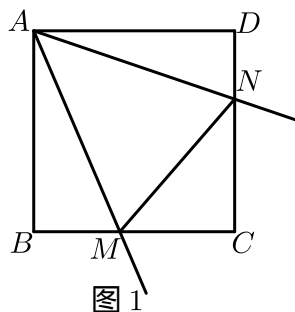


图 1

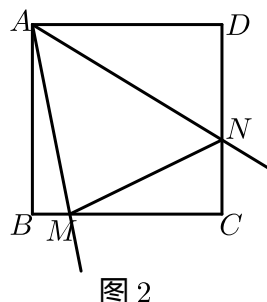


图 2

- (2) 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图3的位置时, 线段 BM 、 DN 和 MN 之间有怎样的等式关系? 请写出你的猜想, 并证明.

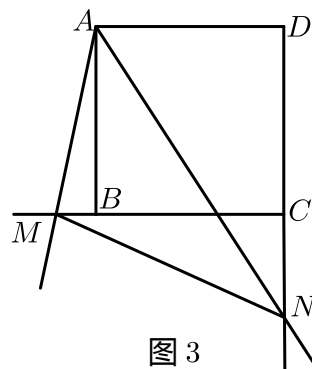


图 3

【答案】(1) 结论成立, 证明见解析.

(2) $MN = DN - BM$, 证明见解析.

【解析】(1) 结论成立.

延长 CB 至 E , 使得 $BE = DN$, 连结 AE .

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore AB = AD$,

$\therefore \angle ABE = \angle ADN = 90^\circ$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADN$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABE = \angle ADN, \\ BE = DN \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADN (\text{SAS})$.

$\therefore AE = AN$, $\angle BAE = \angle DAN$.

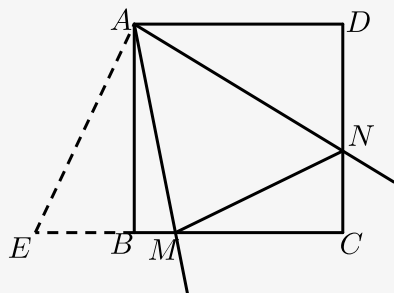
$\therefore \angle MAE = \angle MAN = 45^\circ$.

在 $\triangle AEM$ 和 $\triangle ANM$ 中,

$$\begin{cases} AE = AN \\ \angle MAE = \angle MAN, \\ AM = AM \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEM \cong \triangle ANM (\text{SAS})$,

$\therefore ME = MN = BM + DN$.



(2) $MN = DN - BM$.

在 DN 上截取 $DF = BM$, 连结 AF .

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ABM$ 中,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle ADF = \angle ABM \\ DF = BM \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ABM$,

$\therefore AF = AM$, $\angle DAF = \angle BAM$.

在 $\triangle AMN$ 和 $\triangle AFN$ 中,

$$\begin{cases} AM = AF \\ \angle MAN = \angle FAN, \\ AN = AN \end{cases}$$

$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AFN$,

$\therefore MN = FN$.

$\therefore MN = DN - DF = DN - BM$.

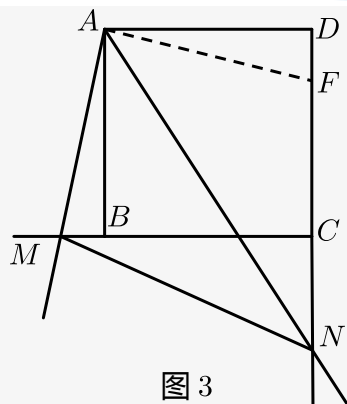


图 3

【标注】【知识点】正方形与全等综合

20. 已知：正方形 $ABCD$ 中（图1）， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB ， DC （或它们的延长线）于点 M ， N 。

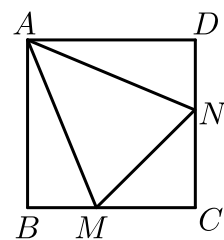


图1

（1）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时（图2），线段 BM ， DN 和 MN 之间有怎样的数量关系？写出猜想，并加以证明。

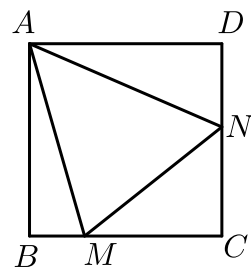


图2

（2）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到图3的位置时，线段 BM ， DN 和 MN 之间又有怎样的数量关系？证明你的猜想。

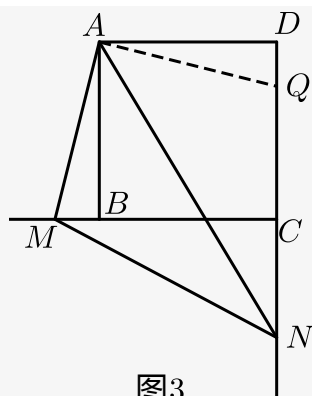


图3

在 $\triangle AMN$ 和 $\triangle AQN$ 中，

$$\begin{cases} AQ = AM \\ \angle QAN = \angle MAN, \\ AN = AN \end{cases}$$

$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AQN$ (SAS) ,

$\therefore MN = QN$,

$\therefore DN - BM = MN$.

(3) 如图1 .

$\because$ 正方形的边长为4 ,

点 N 运动到 DC 边的中点处 ,

$\therefore CN = DN = 2$.

根据 (1) 可知 , $BM + DN = MN$,

设 $MN = x$, 则 $BM = x - 2$,

$\therefore CM = 4 - (x - 2) = 6 - x$.

在 $\text{Rt}\triangle CMN$ 中 ,

$$\therefore MN^2 = CM^2 + CN^2 ,$$

$$\therefore x^2 = (6 - x)^2 + 2^2 .$$

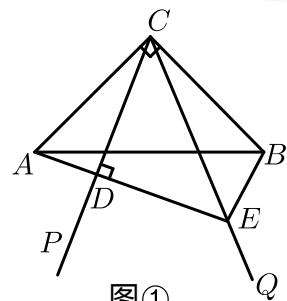
$$\text{解得 } x = \frac{10}{3} .$$

$$\therefore MB = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3} .$$

【标注】【知识点】半角模型

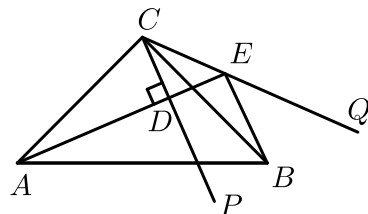
21. 如图：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $\angle PCQ = 45^\circ$ ，把 $\angle PCQ$ 绕点 C 旋转，在整个旋转过程中，过点 A 作 $AD \perp CP$ ，垂足为 D ，直线 AD 交 CQ 于 E .

(1) 如图①，当 $\angle PCQ$ 在 $\angle ACB$ 内部时，求证： $AD + BE = DE$.



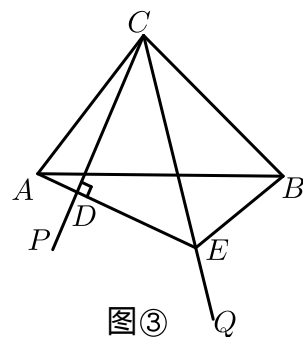
图①

(2) 如图②, 当 CQ 在 $\angle ACB$ 外部时, 则线段 AD 、 BE 与 DE 的关系为 _____ .



图②

(3) 在 (1) 的条件下, 若 $CD = 12$, $S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle ACD}$, 求 AE 的长 .



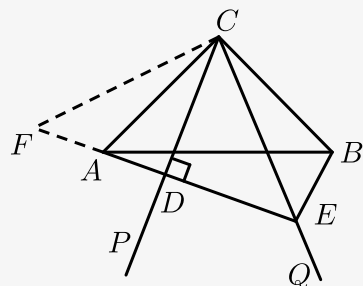
图③

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $AD = BE + DE$

(3) 16 .

【解析】 (1) 如图①, 延长 DA 到 F , 使 $DF = DE$,



图①

$\therefore CD \perp AE$,

$\therefore CE = CF$,

$\therefore \angle DCE = \angle DCF = \angle PCQ = 45^\circ$,

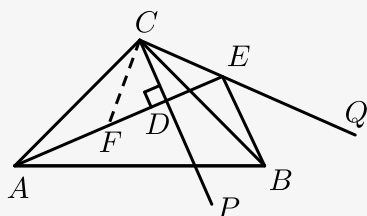
$\therefore \angle ACD + \angle ACF = \angle DCF = 45^\circ$,

$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle PCQ = 45^\circ,$
 $\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$
 $\therefore \angle ACF = \angle BCE,$
 $\therefore$ 在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} CE = CF \\ \angle ACF = \angle BCE, \\ AC = BC \end{cases}$$

 $\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCE \text{ (SAS)},$
 $\therefore AF = BE,$
 $\therefore AD + BE = AD + AF = DF = DE,$
 即 $AD + BE = DE.$

(2) 如图②, 在 AD 上截取 $DF = DE,$



图②

$\therefore CD \perp AE,$
 $\therefore CE = CF,$
 $\therefore \angle DCE = \angle DCF = \angle PCQ = 45^\circ,$
 $\therefore \angle ECF = \angle DCE + \angle DCF = 90^\circ,$
 $\therefore \angle BCE + \angle BCF = \angle ECF = 90^\circ,$
 $\text{又} \because \angle ACB = 90^\circ,$
 $\therefore \angle ACF + \angle BCF = 90^\circ,$
 $\therefore \angle ACF = \angle BCE,$
 $\therefore$ 在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} CE = CF \\ \angle ACF = \angle BCE, \\ AC = BC \end{cases}$$

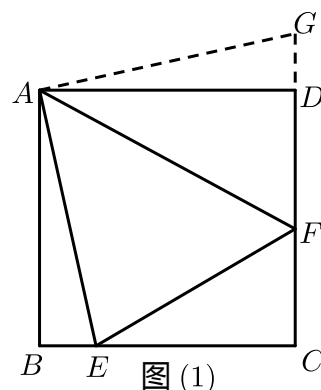
 $\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCE \text{ (SAS)},$
 $\therefore AF = BE,$
 $\therefore AD = AF + DF = BE + DE,$
 即 $AD = BE + DE,$
 故答案为: $AD = BE + DE.$

(3) $\because \angle DCE = \angle DCF = \angle PCQ = 45^\circ,$
 $\therefore \angle ECF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$

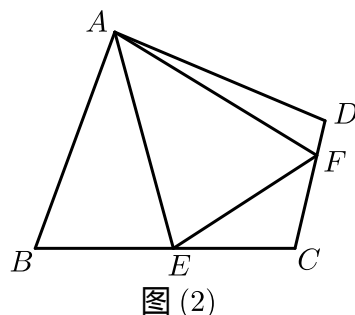
$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle ECF \text{ 是等腰直角三角形,} \\
&\therefore CD = DF = DE = 12, \\
&\therefore S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle ACD}, \\
&\therefore AF = 2AD, \\
&\therefore AD = \frac{1}{1+2} \times 12 = 4, \\
&\therefore AE = AD + DE = 4 + 12 = 16.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】等腰直角三角形中的半角模型

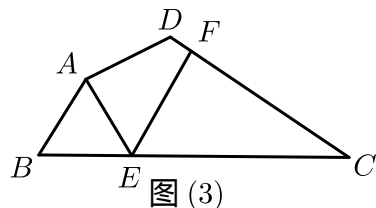
22. 问题：如图（1）点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，试判断 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系．



- (1) 【探索发现】小明把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° ，至 $\triangle ADG$ ，从而发现 BE 、 EF 、 FD 之间满足 _____ 的数量关系．
- (2) 【类比引申】如图（2），四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD \neq 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，则当 $\angle EAF$ 与 $\angle BAD$ 满足 _____ 关系时， BE 、 EF 、 FD 之间仍满足以上的数量关系，并说明理由．



- (3) 【探究应用】如图（3），在某公园的同一水平面上，四条通道围成四边形 $ABCD$ ．已知 $AB = AD = 100$ 米， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle ADC = 120^\circ$ ， $\angle BAD = 150^\circ$ ，道路 BC 、 CD 上分别有景点 E 、 F ，且 $AE \perp AD$ ， $DF = 50(\sqrt{3} - 1)$ 米，现要在 E 、 F 之间修一条笔直道路，求这条道路 EF 的长（结果保留根号）．



【答案】(1) $BE + DF = EF$

$$(2) \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$$

$$(3) EF = 50(\sqrt{3} + 1) \text{米}.$$

【解析】(1) 由旋转可知, $\triangle ABE \cong \triangle ADG$,

$$\therefore \angle B = \angle ADG = 90^\circ, BE = GD, \angle BAE = \angle DAG, AE = AG,$$

$$\therefore \angle GDF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ, \text{即} G, D, F \text{三点共线},$$

$$\therefore \angle EAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle FAD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAG + \angle FAD = 45^\circ, \text{即} \angle EAF = \angle GAF,$$

在 $\triangle EAF$ 与 $\triangle GAF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AG \\ \angle EAF = \angle GAF, \\ AF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAF \cong \triangle GAF (\text{SAS}),$$

$$\therefore EF = GF = GD + DF = BE + DF.$$

(2) 将 $\triangle ABE$ 绕 A 点逆时针旋转至 $\triangle ADG$,

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADG, \angle BAE = \angle DAG,$$

$$AE = AG, BE = DG,$$

$$\therefore \angle B + \angle D = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADG + \angle D = 180^\circ,$$

即 G, D, F 三点共线,

$$\therefore \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle FAD = \angle EAF,$$

$$\therefore \angle DAG + \angle FAD = \angle EAF, \text{即} \angle EAF = \angle GAF,$$

在 $\triangle EAF$ 与 $\triangle GAF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AG \\ \angle EAF = \angle GAF, \\ AF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAF \cong \triangle GAF (\text{SAS}),$$

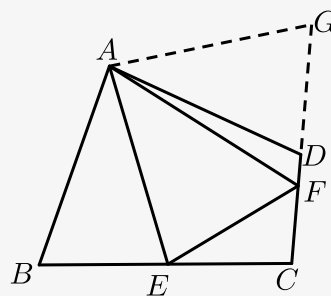
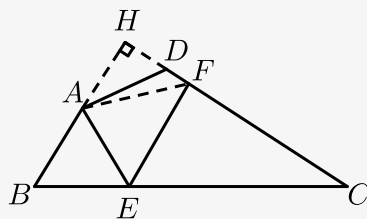


图 (2)

$$\therefore EF = GF = GD + DF = BE + DF.$$

(3) 过A作 $AH \perp CD$ 于H, 连接AF,

则



图(3)

$$\angle ADH = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore DH = \frac{1}{2}AD = 50, AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AD = 50\sqrt{3},$$

$$\therefore HF = HD + DF = 50 + 50(\sqrt{3} - 1) = 50\sqrt{3},$$

$$\therefore AH = HF,$$

$\therefore \triangle HAF$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle HAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle HAF - \angle HAD = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ,$$

$$\therefore AD \perp AE,$$

$$\therefore \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle DAE - \angle DAF = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ,$$

$$\text{而} \angle BAD = 150^\circ,$$

$$\text{即} \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD,$$

$$\text{又} \because AB = AD, \angle B + \angle ADC = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ,$$

故由(2)中结论可知, $EF = BE + DF$,

$$\text{而} \angle BAE = \angle BAD - \angle DAE = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ = \angle B,$$

$\therefore \triangle ABE$ 为等边三角形,

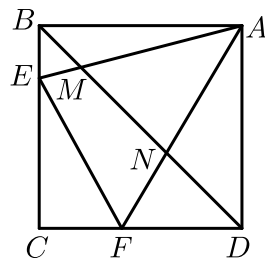
$$\therefore BE = AB = 100,$$

$$\therefore EF = BE + DF = 100 + 50(\sqrt{3} - 1) = 50\sqrt{3} + 50 \text{ (米)}.$$

【标注】【知识点】半角模型

|| 角含半角的平方关系——半角在倍角内

23. 如图, 点E、F分别是正方形ABCD的边BC、CD上的点, $\angle EAF = 45^\circ$, 连接EF, 则EF、BE、FD之间的数量关系是 _____. 连结BD, 交AE、AF于点M、N, 则MN、BM、DN满足的数量关系是 _____.

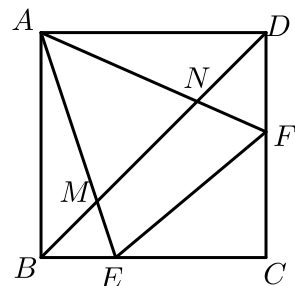


【答案】 $EF = BE + FD$; $MN^2 = BM^2 + DN^2$

【解析】 $EF = BE + FD$, $MN^2 = BM^2 + DN^2$

【标注】 【知识点】 正方形中的半角模型；等腰直角三角形中的半角模型

24. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 BD ，分别交 AE 、 AF 于点 M 、 N ；若 $BE = 3$ ， $DF = 4$ ，则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$ ，若 $BM = 2$ ， $DN = 3$ ，则 $MN = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 7 ; $\sqrt{13}$

【解析】 $BE = 3$ ， $DF = 4$ ，

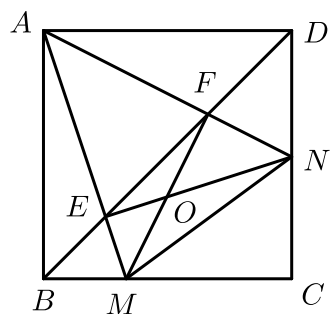
$$EF = BE + DF = 7，$$

$$MN^2 = BM^2 + DN^2 = 13，$$

$$MN = \sqrt{13}。$$

【标注】 【知识点】 正方形中的半角模型；等腰直角三角形中的半角模型

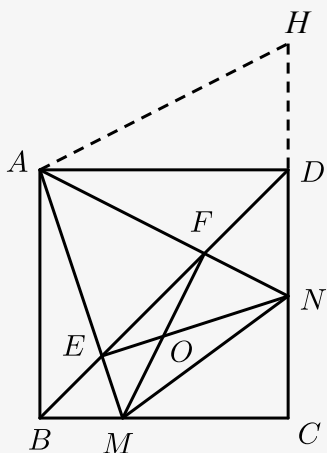
25. 如图，已知正方形 $ABCD$ ， M ， N 分别是 BC ， CD 上的点， $\angle MAN = 45^\circ$ ，连接 BD 分别交 AM ， AN 于 E ， F ，下面结论错误的是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



- ① $\triangle CMN$ 的周长等于正方形 $ABCD$ 的边长的两倍；
- ② 点 A 到 MN 的距离等于正方形 $ABCD$ 的边长；
- ③ $EF^2 = BE^2 + DF^2$ ；
- ④ $\triangle EMO$ 与 $\triangle FNO$ 均为等腰直角三角形；
- ⑤ $S_{\triangle AMN} = \sqrt{2}S_{\triangle AEF}$ ；
- ⑥ $S_{\text{正方形}ABCD} : S_{\triangle AMN} = 2AB : MN$ 。

【答案】⑤

【解析】将 $\triangle ABM$ 绕点 A 逆时针旋转，使 AB 与 AD 重合，得到 $\triangle ADH$ 。则 $\angle DAH = \angle BAM$



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle MAN = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BAN + \angle DAN = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle NAH = 45^\circ$ ，

在 $\triangle MAN$ 和 $\triangle HAN$ 中，
$$\begin{cases} AM = AH \\ \angle MAN = \angle HAN \\ AN = AN \end{cases}$$

$\therefore \triangle MAN \cong \triangle HAN$ ， $\therefore MN = NH = BM + DN$ ，

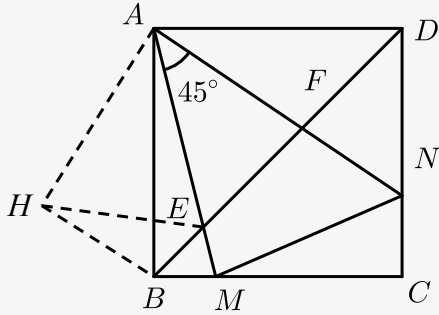
$\therefore \triangle CMN$ 的周长 $= CM + CN + MN = CM + BM + CN + DN = CB + CD$,

$\therefore \triangle CMN$ 的周长等于正方形 $ABCD$ 的边长的两倍, ①结论正确;

$\therefore \triangle MAN \cong \triangle HAN$,

$\therefore$ 点 A 到 MN 的距离等于正方形 $ABCD$ 的边长 AD , ②结论正确;

如图所示, 将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针性质 90° 得到 $\triangle ABH$, 连接 HE .



$\therefore \angle DAF + \angle BAE = 90^\circ - \angle EAF = 45^\circ$, $\angle DAF = \angle BAE$,

$\therefore \angle EAH = \angle EAF = 45^\circ$,

$\therefore EA = EA$, $AH = AD$,

$\therefore \triangle EAH \cong \triangle EAF$,

$\therefore EF = HE$,

$\therefore \angle ABH = \angle ADF = 45^\circ = \angle ABD$,

$\therefore \angle HBE = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle BHE$ 中, $HE^2 = BH^2 + BE^2$,

$\therefore BH = DF$, $EF = HE$,

$\therefore EF^2 = BE^2 + DF^2$, ③结论正确;

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$, $\angle BDC = \angle ADB = 45^\circ$,

$\therefore \angle MAN = 45^\circ$,

$\therefore \angle EAN = \angle EDN$,

$\therefore A$ 、 E 、 N 、 D 四点共圆,

$\therefore \angle ADN + \angle AEN = 180^\circ$,

$\therefore \angle AEN = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AEN$ 是等腰直角三角形,

同理 $\triangle AFM$ 是等腰直角三角形; ④结论正确;

$\therefore \triangle AEN$ 是等腰直角三角形, 同理 $\triangle AFM$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AM = \sqrt{2}AF$, $AN = \sqrt{2}AE$,

$\therefore S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}AM \cdot AN \cdot \sin 45^\circ$, $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot AF \cdot \sin 45^\circ$,

$\therefore S_{\triangle AMN} : S_{\triangle AEF} = 2, \therefore S_{\triangle AMN} = 2S_{\triangle AEF}$, ⑤结论错误;

$\therefore$ 点A到MN的距离等于正方形ABCD的边长,

$\therefore S_{\text{正方形}ABCD} : S_{\triangle AMN} = \frac{AB \times AB}{\frac{1}{2} \times MN \times AB} = 2AB : MN$, ⑥结论正确.

【标注】【知识点】求等腰直角三角形的边长;正方形中的半角模型

26. 【发现证明】

如图1, 点E, F分别在正方形ABCD的边BC, CD上, $\angle EAF = 45^\circ$, 试判断BE, EF, FD之间的数量关系.

小聪把 $\triangle ABE$ 绕点A逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$, 通过证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$; 从而发现并证明了 $EF = BE + FD$.

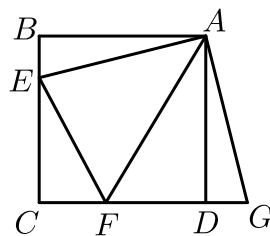


图1

(1) 【类比引申】

如图2, 点E, F分别在正方形ABCD的边CB、DC的延长线上, $\angle EAF = 45^\circ$, 连接EF, 请根据小聪的发现给你的启示写出EF、BE、DF之间的数量关系, 并证明.

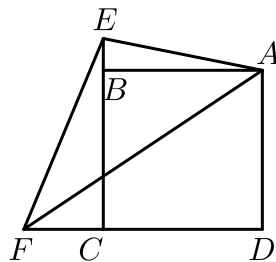


图2

(2) 【联想拓展】

如图3, 如图, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 点E, F在边BC上, 且 $\angle EAF = 45^\circ$, 若 $BE = 3$, $EF = 5$, 求CF的长.

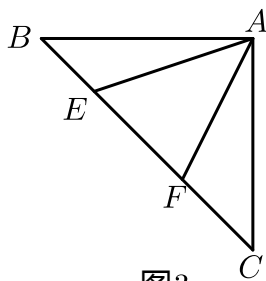


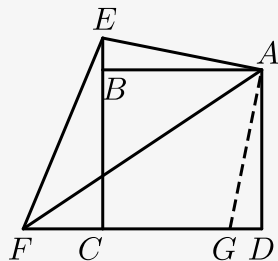
图3

【答案】(1) $DF = EF + BE$

(2) $CF = 4$

【解析】(1) $DF = EF + BE$.

证明：如图(1)所示，



图(1)

$\because AB = AD$,

$\therefore$ 把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$, 可使 AB 与 AD 重合,

$\because \angle ADC = \angle ABE = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 C 、 D 、 G 在一条直线上,

$\therefore EB = DG$, $AE = AG$, $\angle EAB = \angle GAD$,

$\because \angle BAG + \angle GAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAG = \angle BAD = 90^\circ$,

$\because \angle EAF = 45^\circ$,

$\therefore \angle FAG = \angle EAG - \angle EAF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

$\therefore \angle EAF = \angle GAF$,

在 $\triangle EAF$ 和 $\triangle GAF$ 中,

$$\begin{cases} EA = GA \\ \angle EAF = \angle GAF \\ AF = AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle EAF \cong \triangle GAF$,

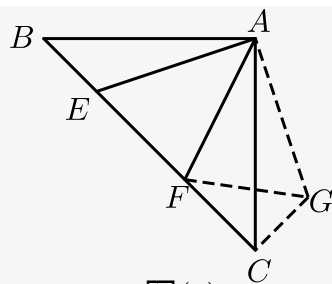
$\therefore EF = FG$,

$\therefore FD = FG + DG$,

$\therefore DF = EF + BE$.

(2) $\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore$ 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ACG$, 连接 FG , 如图(2),



图(2)

$$\therefore AG = AE, CG = BE, \angle ACG = \angle B, \angle EAG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FCG = \angle ACB + \angle ACG = \angle ACB + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore FG^2 = FC^2 + CG^2 = BE^2 + FC^2;$$

$$\text{又} \because \angle EAF = 45^\circ,$$

$$\text{而} \angle EAG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAF = 90^\circ - 45^\circ,$$

在 $\triangle AGF$ 与 $\triangle AEF$ 中,

$$\begin{cases} EA = GA \\ \angle EAF = \angle GAF, \\ AF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF,$$

$$\therefore EF = FG,$$

$$\therefore CF^2 = EF^2 - BE^2 = 5^2 - 3^2 = 16,$$

$$\therefore CF = 4.$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

27. 在学习了等腰三角形的知识后, 数学兴趣小组的同学们又进一步对等腰直角三角形的一些特殊线段之间的关系进行了探究.

(1) **【尝试探究】**

问题: 如图(1), 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB$, $\angle DCE = 45^\circ$, 试探究线段 AD 、 DE 、 EB 之间满足的等量关系.

【探究发现】

如图(2), 小聪同学作 $\triangle CBF \cong \triangle CAD$, 连接 EF , 由已知条件易得 $\angle EBF =$ _____ 度, $\angle ECF = \angle ECB + \angle BCF = \angle ECB + \angle ACD =$ _____ 度.

再根据“边角边”, 可证 $\triangle CEF \cong$ _____, 得到 $EF =$ _____.

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中, 根据 _____ 定理, 可得到 $BF^2 + BE^2 = EF^2$,

所以 AD 、 DE 、 EB 之间的等量关系是 _____.

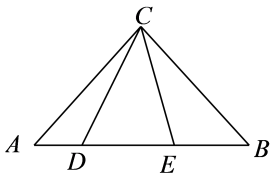


图 (1)

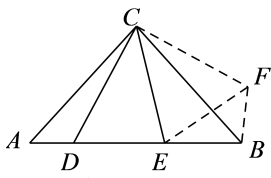


图 (2)

(2) 【实践运用】

回答下列问题：

- ① 如图 (3)，在正方形 $ABCD$ 中， $\triangle AEF$ 的顶点 E 、 F 分别在 BC 、 CD 边上，高 AG 与正方形的边长相等，求 $\angle EAF$ 的度数。

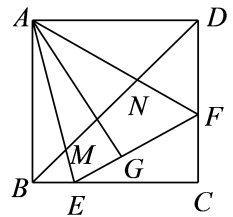


图 (3)

- ② 在①的条件下，连接 BD ，分别交 AE 、 AF 于点 M 、 N ，若 $BE = 2$ ， $CF = 3$ ，则正方形的边长为 _____。
- ③ 在②的条件下， $BM = 2\sqrt{2}$ ，运用小聪同学探究的结论，直接写出 MN 的长为 _____。

【答案】(1) 90° ； 45° ； $\triangle CED$ ； DE ；勾股； $AD^2 + BE^2 = DE^2$

(2) ① 45° 。

② 6

③ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【解析】(1) 如图1中，将 $\triangle CAD$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle CBF$ ，连接 EF 。

$$\because CA = CB, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle CBA = \angle CBH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EBF = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle DCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCE = \angle BCF + \angle BCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ECD = \angle ECF,$$

在 $\triangle ECF$ 和 $\triangle ECD$ 中，

$$\begin{cases} EC = EC \\ \angle ECF = \angle ECD, \\ CF = CD \end{cases}$$

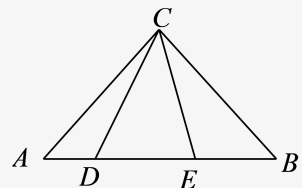


图 (1)

$$\therefore \triangle ECF \cong \triangle ECD \text{ (SAS)},$$

$$\therefore DE = EF.$$

$$\text{在Rt}\triangle EBF\text{中}, EF^2 = EB^2 + BF^2,$$

$$\text{又}\because BF = AD, EF = DE,$$

$$\therefore AD^2 + BE^2 = DE^2,$$

(2) ① 如图2中,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = AD, \angle B = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore AG \perp EF,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle B = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 和 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中,

$$\begin{cases} AE = AE \\ AB = AG \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AEB \cong \text{Rt}\triangle AEG,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle EAG,$$

同理可证 $\text{Rt}\triangle AFD \cong \text{Rt}\triangle AFG$,

$$\therefore \angle FAD = \angle FAG,$$

$$\therefore 2\angle EAG + 2\angle FAG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAG + \angle FAG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = 45^\circ.$$

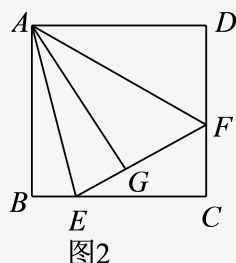


图2

② 如图3中,

旋转 $\triangle ABE$ 到 $\triangle ADH$, 则 $\triangle ABE \cong \triangle ADH$,

$$\therefore DH = BE = 2,$$

由探究发现: $\triangle AEF \cong \triangle AHF$,

$$\therefore FH = EF,$$

$$\text{设 } DF = a,$$

$$\therefore CD = CF + DF = a + 3,$$

$$EF = FH = DF + DH = a + 2,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore BC = CD = a + 3,$$

$$\therefore CE = BC - BE = a + 3 - 2 = a + 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中, 根据勾股定理得, $(a + 2)^2 = (a + 1)^2 + 3^2$,

$$\therefore a = 3,$$

$$\therefore DF = 3,$$

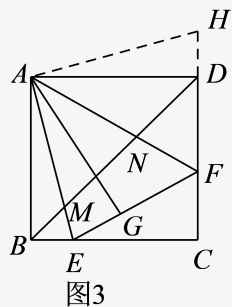


图3

